

Gruppenübung 5

Aufgabe 1 Gegeben sei das lineare System

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Geben Sie jeweils an, ob mit der folgenden Wahl für Q und R ein LQR Reglerentwurf mit garantierter Stabilität möglich ist.

a)

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = 1.$$

b)

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = 1.$$

c)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = 1.$$

d)

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = 1.$$

e)

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = 0.$$

f)

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad R = -1.$$

Aufgabe 2 Gegeben sei das skalare System

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x_0 = x(0),$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $x(t) \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den LQ-Regler $u(x) = -kx$ so, daß

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty qx^2 + ru^2 dt \stackrel{!}{=} \text{Min},$$

mit $q, r > 0$.

b) Bestimmen Sie nun einen Regler $u(x) = -kx$, der das System mit minimaler Stellenergie stabilisiert, d.h. $q \rightarrow 0$.

Aufgabe 3 Gegeben sei das lineare System

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = x_0$$

und das Kostenfunktional ($q, r > 0$)

$$J = \int_0^\infty qx^2 + ru^2 dt.$$

- a) Wie lautet der Regler $u = -Kx$, der das Kostenfunktional minimiert und die zugehörige Lösung der Riccati Gleichung?
- b) Wo liegen die Eigenwerte des geschlossenen Kreises? Geben Sie den Zustand $x(t)$ des geschlossenen Kreises für $t > 0$ in Abhängigkeit von x_0, q und r an.
- c) Berechnen Sie mit Hilfe von $x(t)$

$$J_{xx} = \int_0^{\infty} q x^2 dt \quad \text{und} \quad J_{uu} = \int_0^{\infty} r u^2 dt$$

in Abhängigkeit von x_0, q und r .

- d) Bestätigen Sie das aus der Vorlesung bekannte Ergebnis

$$J^* = J_{xx} + J_{uu} = x_0^T P x_0.$$